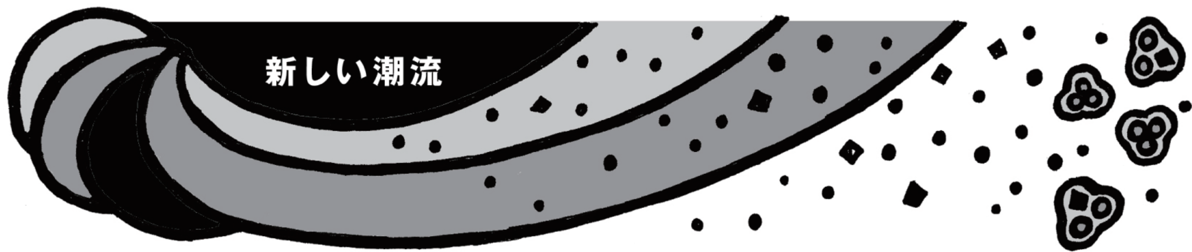


一般化された対称性の観点からみたトポロジカル秩序 –その Quark-Hadron 連続性への応用–

谷崎　佑弥
North Carolina State University

量子多体系では通常の自発的対称性の破れでは捉えきれなかった新しい相が出てくることがあります。分数量子ホール効果に代表されるトポロジカル秩序は、その中でも非常によく研究された例になっています。本稿では、馴染みのある BCS 超伝導が $\mathbb{Z}_2$ トポロジカル相であるという事実を、一般化された対称性の観点（higher-form symmetry）に重きをおいて解説します。また、この観点をハドロン物理に応用した例として、広野氏とおこなった Schaefer-Wilczek の Quark-Hadron 連続性をゼロ温度に拡張した仕事についても簡単に触れます。

1　はじめに

熱力学あるいは統計物理学では、物質の熱力学的性質を議論する際に相という概念を導入します。熱力学的な系が一様な平衡にあることを相と言い、水における気相、液相、固相は最もよく知られた例でしょう。熱力学的変数を変化させる「ある」連続過程で 2 つの状態が相転移なしに移り変わることができるなら、それらは同じ相にあるといいます。このとき重要なのは、van der Waals が実在気体の状態方程式を発見して明らかにしたように、水の気相と液相は十分高温高圧な過程を経れば相転移なしに移りかわれるため、同じ相にあるということです。日常生活の感覚からいうと水と水蒸気は非常に異なって見えてしまうので、これは驚くべきことだと思います。

先の定義に基づくと 2 つの物質の状態が相として違うと言うためには、それらをつなぐ「任意の」過程で相転移があると言わないといけないわけです。このために実際にすべての過程をテストすることはまずできないので、相転移なしには変化することのできない不変量が欲しくなります。2 つの状態である量をそれぞれ計算して、これが違うから相として異なる、というような議論がしたいわけです。この不変量を実現したのが、Landau の秩序 (order) パラメーター理論です [1]。これは、系の持つ対称性に関する自発的な破れに着目して、破れ方が異なるなら違う相、破れ方が同じなら同じ相にある、ということを提案します。水の例で言えば、固相は空間の並進対称性を破っており、液相、気相はこれを破らないために、固相は液相、気相と異なるが、気相

と液相は同じ相にある、ということになります。この Landau による分類は非常に強力な考え方ですし、二次相転移の臨界現象における普遍性を理解する上でも重要です。古典物理の範囲で反例は知られていないと思います。

さて、物質を極限まで冷やすとその性質を理解するためには量子力学は必要不可欠になります。このときに現れる特異な現象を理解する上でも、Landau による分類は重要な役割を果たしました（というよりは、むしろその中で発展したというのが正確でしょうか）[2]。例えば、ヘリウム 4 の λ 転移と呼ばれる二次相転移は、理論の持つ $U(1)$ 対称性が自発的に破れた超流動と破れていない通常の液体との間の相転移として理解できます。Landau 的な相の考え方が浸透したのも、この Ginzburg-Landau 理論の成功が大きいのではないでしょうか。

しかしながらもう少し時代を経ると、Landau による分類は量子多体系の絶対零度での性質を議論するためには十分に一般的ではないことがわかりました。分数量子ホール効果の発見です。分数量子ホール効果が何かというのは、それだけで教科書になるくらいの内容ですのでここでの説明は割愛しますが、重要なのは対称性の変化を全く伴わないにもかかわらず（量子）相転移で区別される状態が存在する、ということです。これは非常に微妙かつ難解な問題で、分数量子ホール効果の現象そのものは Laughlin がその状態の波動関数を提案したことで基本的に説明された事になっていますが [3]、結局これが何らかの秩序によるものなのかはなかなか決着しなかったようです。こういった量子相はトポロジカル秩序と呼ばれていて、例えば分数統計を持つ粒子 (anyon) によって特徴付がなされています。なお、本稿ではトポロジカル秩序といえばこのような intrinsic topological order のことを指して、トポロジカル絶縁体などの symmetry-protected topological （SPT）相のことは含みません。

この記事では、トポロジカル秩序の一般論といった難しい内容には踏み込まないことにします。これらは現在でも研究されている内容ですし、そもそも筆者の知識を超えるためです。そのかわりに教科書では案外見落とされている、BCS 超伝導が $\mathbb{Z}_2$ トポロジカル秩序である、という事実をなるべく丁寧に解説したいと思います。その過程で、対称性の概念を一般化して higher-form symmetry（日本語訳がないので英語のまま呼びます）と呼ばれるものを導入することで、この手のトポロジカル秩序 (の一部) を Landau による相の分類の自然な一般化として理解することを目的とします。その後、この概念のハドロン物理への応用を最後に少しだけ述べて、この記事を締めたいと思います。

2　トポロジカル秩序と BCS 超伝導

2.1　トポロジカル秩序

具体例に入る前に、少しだけトポロジカル秩序の一般的な説明をします。熱力学としての相の違いの定義はすでに述べましたが、ここで量子多体系のゼロ温度に対する相 (量子相) の概念を導入しましょう。ここでは、すべての局所演算子の相関関数が指数的に落ちる場合のみに考察を限ります。これはつまり質量ギャップが開いており、かつクラスター分解性から自発的対称性の破れもないことを意味します。このとき、2 つの状態が量子相として異なる、というのはそれらのハミルトニアンを局所相互作用の結合定数の空間でつないだときにかならず量子相転移がある、こととして定義します。

先程述べたように自発的対称性の破れがない場合に考察を限っていますから、Landau の秩序パラメータによる分類を信じると、すべてのこのような状態は同じ相に属するように思えてしまいます。実際かつての量子場の理論の文脈では、このような質量ギャップが開いたものは自明な相だと思っていたこともあるようですが、実はそれらの間にも一度は質量ギャップを閉じたりしなくてはつなぐことができないような区別が存在する、というのです。つまり、質量ギャップがある中でも本当に自明な相と実は非自明な相があるわけですが、このうちの非自明なものをトポロジカル秩序と呼びます。

ちなみに更に新しい概念である SPT 相は、このトポロジカル秩序としても本当に自明な中でも、結合定数の空間をある対称性を保つものに限ったときに量子相転移を避けるときができないものを区別します。これは余談ですが、Clay 研究所の質量ギャップ問題の後半は単連結 Lie 群をゲージ群にもつ Yang-Mills 理論で質量ギャップが開いていることを示せ、という問題です。つまり、局所的な性質に問題が絞られていますが、物理学者の予想としてはこの場合はさらにトポロジカル秩序としても自明であると思われています [4]（なお、SPT 相として自明かは紫外正則化に依存して、例えば真空角が $\theta = 0$ と 2π の $SU(N)$ Yang-Mills に同じ正則化をすると SPT として区別されます [5, 6]）。単連結でない非可換 Lie 群をゲージ群にもつものには、pure Yang-Mills 理論でもトポロジカル秩序を持つのがもっともらしいと信じられているものもありますから [4]、このような大域的な性質まで含めて解くのが自然に思えます。

さて本題に戻って、トポロジカル秩序の重要な性質を 2 つ上げると、

- 基底状態の数が、コンパクトな空間を考えたときにそのトポロジーに依存する
- 非自明な統計性を示す粒子 (anyon) や相互統計性を示す粒子の組が存在する

ということがあります。このあたりは具体例を見たほうがわかりやすいと思うので、詳しい説明はその時にします。ここで強調したいのは、基底状態の数は離散的な量ですから、ハミルトニアンの連続変形で変化できないので、量子相の区別のための良い不変量になっているわけです。また、局所的には何も面白いことはなかったのに、大域的には長距離でも非自明なことが量子的に起きている、ということでこの事実を長距離エンタングルメントがあると言ったりもします。

2.2 BCS 超伝導

さて、トポロジカル秩序の例として BCS 超伝導を見てみようと思います。BCS 理論は、金属中の電子多体系を考えたときに格子振動を介して電子間に s 波の引力相互作用が生じることで、フェルミ面の対面にある電子が Cooper 対を形成することを仮定します。そして、この Cooper 対が十分低温では Bose 凝縮することで Higgs 機構が働き、超伝導状態になるという理論です。本当は非相対論的な場の理論として取り扱うのが適切でしょうが、ここではその相対論的な対応物で考えたいと思います。

このアイディアに基づいて、$d+1$ 次元 $U(1)$ ゲージ理論としての Ginzburg-Landau 有効作用を書きたいと思います。ここで、次元を $d+1$ と書いたときは、空間次元が d でそれに虚時間の 1 次元を足しているという気持ちで、物性出身の人と高エネルギー出身の人の間で混乱しないためにしばしば使われる記法です。さて、素電荷 e を基準にして電荷 1 の粒子、すなわち電子、は Cooper 対の中に束縛されているので、絶対零度に十分近ければその準粒子としての励起を考え

る必要はないでしょう。つまり低エネルギー有効理論を記述する上では、電荷 2 の boson である Cooper 対を考えれば十分なので、これを Φ と書きましょう。これで有効作用は $U(1)$ ゲージ場 a と Cooper 対 Φ を使って、

$$S[a,\Phi] = \frac{1}{4e^2}\int |\mathrm{d}a|^2 + \int |(\mathrm{d}+2\mathrm{i}a)\Phi|^2 \tag{1}$$

とかけます。ここで一般に $\omega = \frac{1}{n!}\omega_{\mu_1\cdots\mu_n}\mathrm{d}x^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{\mu_n}$ と場が n 形式で書けるときに $|\omega|^2 = \omega\wedge\star\omega = \omega^2_{\mu_1\cdots\mu_n}\mathrm{d}^{d+1}x$ と略記していて、第一項が Maxwell 項で、第二項が Cooper 対の運動項です。共変微分の中でゲージ場の前に 2 がかかっているのが、Φ の電荷が 2 であることを表しています。より一般に、Φ の電荷が n であれば、有効作用は

$$S[a,\Phi] = \frac{1}{4e^2}\int |\mathrm{d}a|^2 + \int |(\mathrm{d}+n\mathrm{i}a)\Phi|^2 \tag{2}$$

となります。せっかくなので、以下は一般の電荷 n で議論します。

この理論のゲージ変換について、大きなゲージ変換を含めてまとめておきます。作用 $S[a,\Phi]$ は、2π-periodic compact scalar field λ を用いた変換、

$$a \mapsto a + \mathrm{d}\lambda, \quad \Phi \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\lambda}\Phi, \tag{3}$$

のもとで不変であり、これがゲージ変換です。λ が 2π 周期性を持つことは重要であり、基本的な Wilson loop

$$W(C) = \exp\left(\mathrm{i}\int_C a\right) \tag{4}$$

の不変性から要求されます。つまり、先のゲージ変換のもとで

$$W(C) \mapsto W(C)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\int_C \lambda} \tag{5}$$

となるわけですから、すべての閉じたループ C についてこの phase の変化が 1 であるために、λ は 2π 周期でないといけません。ゲージ理論は Lagrangian だけでなくこのように大きなゲージ変換の normalization まで指定して初めて定義されるので、この normalization は一度定めるとその後の計算は常にそれに従う必要があります。当たり前のように聞こえるかもしれませんが、局所的な相関関数の計算では関係ないことが多いのであまり気にしていないこともあり、論文を読む際は実は注意が必要です。ここでは、トポロジカルな理論の計算の際によく使われるもの (の一つ) を採用しています。同じ注意の言い換えになりますが、この大きなゲージ変換の定義からゲージ場の強さは時空内の任意の閉じた 2 次元曲面 M_2 に対して

$$\int_{M_2} \mathrm{d}a \in 2\pi\mathbb{Z} \tag{6}$$

という Dirac の量子化条件を満たしていて、経路積分 $\int\mathcal{D}a$ を実行する際はこのようなゲージ配位すべてについて足し上げます。

さて、上の Lagrangian には書いていませんが Cooper 対は wine-bottle potential を感じていることにしましょう：$V(\Phi) = g(\Phi^*\Phi - \frac{1}{2}v^2)^2$。こうすると、$\Phi$ の大きさの揺らぎは重たいので低エネルギー物理を議論する上では無視しても良さそうです。よって、Cooper 対の場 Φ を

$$\Phi(x) = \frac{v}{\sqrt{2}}\exp\left(\mathrm{i}\varphi(x)\right) \tag{7}$$

と平均場近似の範囲で書くことができます。ここで、$\varphi(x)$ が phase の揺らぎを表していて、2π 周期性を持つコンパクトなスカラー場です。これで、低エネルギー有効理論は

$$S[a,\phi]=\frac{v^2}{2}\int|(\mathrm{d}\varphi-na)|^2 \tag{8}$$

となります。ゲージ場の運動項はゲージ場が Higgs 機構で重たくなるのでついでに無視しました。

この理論は質量ギャップが開いているのはすぐに分かりますが、さらにトポロジカル秩序になっています。まず、ゲージ場についての運動方程式から

$$na=\mathrm{d}\varphi \tag{9}$$

となっていて、超伝導は磁場をはじくことに対応してゲージ場の強さは $\mathrm{d}a=0$ を満たしますから、Wilson loop $W(C)$ の値は C の連続変形では変わりません。ここで、空間の多様体がトーラス T^d の場合と球面 S^d の場合を考えて、それぞれ真空が何個でるか数えてみましょう。

まず、球面の場合 $\pi_1(S^d)=0$ ですから、すべてのループは一点に連続的に潰すことができます。よって、任意の Wilson loop は C を一点に潰すことで

$$W(C)=1 \tag{10}$$

となります。これは、球面上で理論の真空は 1 つしかないことを意味しています。

一方、トーラスの場合 $\pi_1(T^d)=\mathbb{Z}^d$ なので、d 個の潰すことのできない基本的なループ S_I^1 $(I=1,\ldots,d)$ が存在します。これは、d 個の空間的な Polyakov loop が定義できると言っているだけなのですが、そのような各 Polyakov loop に対して、

$$P(S_I^1)=\exp\left(\mathrm{i}\int_0^L\mathrm{d}x^I a_I\right)=\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{n}\int_0^L\mathrm{d}x^I\partial_I\varphi\right) \tag{11}$$

は φ の 2π 周期性から $\mathbb{Z}_n$ phase に独立に量子化されます。例えば、φ の配位として、トーラスの各周長を L、$k_I\in\{0,1,\ldots,d-1\}$ として

$$\varphi=\sum_{I=1}^{d}\frac{2\pi k_I}{L}x^I \tag{12}$$

といったものを考えればよいわけです。どの $\{k_I\}$ の組を選んでもエネルギーは変わらない事はすぐわかるので、トーラス上では n^d 個の真空が縮退することになります。空間のトポロジーによって真空の数が変わる、というトポロジカル秩序の性質を見ることができました。

空間のトポロジーを実験で変えるのは難しく思えますが、これは欠陥を導入することで有効的に実現できます。ここでいう欠陥はいわゆる超伝導渦のことですが、この中では Cooper 対の凝縮が消えているので磁場が入ることができます。ただし、その周りでは先の超伝導の有効理論が使えなくてはならないため、磁束の大きさが $2\pi/n$ に量子化され、これが先程の空間に穴が空いている時に真空が n 個出ることに対応します。具体的に物理を理解するために、試験電荷を用意して、それを超伝導渦から十分離れたところで一周させてみましょう。磁場は超伝導体の十分内部には侵入しないので、試験電荷は局所的には何も感じませんが、一周させたときの波動関数は Aharonov-Bohm phase の分だけ変化します。これは、超伝導渦と試験電荷の間に非自明な相互統計が存在することを意味していて、やはりトポロジカル秩序の性質を見ることができました。

ここで、最初の疑問に立ち返ってみましょう。BCS 超伝導は結局のところ秩序を持っているのでしょうか？Ginzburg-Landau(GL) 理論でうまく行ってしまったので、$U(1)$ 対称性が自発的に破れたと言いたくなってしまいますが、ゲージ不変性は物理的な状態を変化させないのでそもそも対称性ではありません。ゲージ固定してしまう、という立場を取れば見かけ上は良いというかもしれませんが、それは非局所的な操作ですから本質的に非局所演算子を考えていることになり、局所演算子の期待値によって相を分類するというもともとの Landau の考え方には沿っていません。

ただ、おそらく当時としては興味のある物理量は GL でだいたい計算できてしまうわけなので、こういう抽象的なことには立ち入らなかったのだと思われます。実際、BCS 超伝導をトポロジカル秩序とみなすようになったのはずっとあとのことです。後に、非可換ゲージ理論の閉じ込めとはなにかとか、分数量子ホール効果の発見といったことを契機にこのような物理が再考されることとなります。

3 Higher-form symmetry

前節でとりあえずトポロジカル秩序の例を一つ見ました。これは局所演算子の期待値で定義できるような通常の秩序相ではないわけですから、秩序として理解するならこれまでの対称性の概念の一般化が必要なのは明らかです。しかし、あらゆる非局所演算子を許してしまえば、自由エネルギーがどんなになめらかな場所であってもその期待値に転移があるように見えてしまって、相転移と関係のないものになってしまいます。そのため、量子場の理論のユニタリー性や局所性と整合するように注意しつつ拡張しないといけません。

Higher-form symmetry はそのような対称性の拡張の一つです。より一般の拡張として n-group symmetry といったものもありますが、ここでは higher-form symmetry に話を限ります。このあたりの話はこの数年で急速に発展しているので、完全な一般化が何なのかは筆者も知りません。

3.1 通常の対称性

Higher-form symmetry の前に、普通の意味の対称性を復習しておきます。まず、量子力学で対称性といったときには、ray の空間 $\mathcal{H}/\mathbb{C}^\times$ に対する変換で内積を不変に保ち、ハミルトニアンと交換するものを指しますが、場の量子論の文脈ではふつう理論の局所性と相性の良いもっと狭い範囲で考えます。

ここでは簡単のため内部対称性 G に話を限りましょう。相対論的場の理論では時間と空間を区別する必要はないので、対称性はハミルトニアンと交換するだけでなく、エネルギー運動量テンソルと交換することを要求しても良さそうです。あと、点 x で定義される局所演算子は変換後も点 x のみで定義されることを要求します。これらの要求の結果として、$D = d + 1$ 次元の場の理論に対して対称性は次の条件を満たすものを指します [7]。

- 各 codim-1 の部分空間 M_{D-1} と $g \in G$ に対して演算子 $U_g(M_{D-1})$ が定義できる。
- $U_g(M_{D-1})$ を含む相関関数は、M_{D-1} の連続変形で不変である。
- 群の演算規則に従う: $U_{g_1}(M_{D-1})U_{g_2}(M_{D-1}) = U_{g_1 g_2}(M_{D-1})$。

- 局所演算子 $O_i(x)$ について点 x にリンクする球面 S^{D-1} を考えると、G のある表現 R で $U_g(S^{D-1})O_i(x) = R_i^j(g)O_j(x)$ と交換する。このとき、少なくともある O について $R \neq 1$。

だいぶ抽象的になりましたが、フレーバー対称性など場の理論で出てくる知っている内部対称性は全てこれらを満たします。

はじめの条件で、時空を M_{D-1} で 2 つに分けたときにその片方を g で変換する演算 $U_g(M_{D-1})$ を定義しています。この変換が対称性なのであれば M_{D-1} を時間方向にずらしても良いというのが保存則の意味するところですが、さらにエネルギー運動量テンソルと交換することを要求したときには、二番目の条件のように M_{D-1} を任意に連続変形しても良いことになります。つまり、対称性変換とは codim-1 の可逆なトポロジカル欠陥を導入すること、とまとめることができます。

対称性が自発的に破れているかどうかは、ODLRO (Off-diagonal long-range order) で定義します。つまり、時空を無限に大きくすると同時に局所演算子の二点関数を離す極限をとって、

$$\langle O_i(x)^* O_i(0)\rangle \to v^2 \neq 0 \tag{13}$$

とクラスター分解性が壊れたときに、対称性が自発的に破れたと定義します。このような面倒なことをするのは、コンパクトな時空上では、対称性の非自明な表現に属する局所演算子の一点関数は必ずゼロになるためです。クラスター分解性が壊れているのはこの無限体積極限でえられる真空が pure state の重ね合わせになることを意味しているため、pure state を一つ取りだすことでいつもの対称性の破れの議論と一致します。

3.2 *p*-form symmetry

前節で挙げた 4 つの条件を満たすものを対称性の定義とする立場を取ると、p-form symmetry はその自然な一般化として捉えることができます [7]：

- 各 codim-$(p+1)$ の部分空間 M_{D-p-1} と $g \in G$ に対して演算子 $U_g(M_{D-p-1})$ が定義できる。
- $U_g(M_{D-p-1})$ を含む相関関数は、M_{D-p-1} の連続変形で不変である。
- 群の演算規則に従う: $U_{g_1}(M_{D-p-1})U_{g_2}(M_{D-p-1}) = U_{g_1g_2}(M_{D-p-1})$。
- p 次元部分空間 C_p 上で定義される演算子 $O_i(C_p)$ について C_p にリンクする球面 S^{D-p-1} を考えると、G のある表現 R で $U_g(S^{D-p-1})O_i(C_p) = R_i^j(g)O_j(C_p)$ と交換する。このとき、少なくともある O について $R \neq 1$。

これらが満たされるときに p-form symmetry G があると定義します。一般に、$p \geq 1$ では対称性 G はアーベル群になります。普通の対称性は $p = 0$ の場合ですから、その意味で一般化になっています。自発的破れを議論したり、ゲージ化やそのアノマリーを考えたりと、普通の対称性でできることはだいたい考えることができ、近年多くの応用が見つかっています。このあたりのテクニックは超弦理論の文脈では古くから知られていたようですが、場の理論を調べる有用なツールであると認識されたのはこの数年の出来事です。

p-form symmetry に対して、自発的対称性の破れは ODLRO を拡張して、（適切な繰り込み処方のもとで）C_p を無限体積極限とともに大きくしたときに

$$\langle O(C_p)\rangle \not\to 0 \tag{14}$$

となることとして定義します。これは実はゲージ理論の閉じ込めと Higgs 相を Wilson loop の振る舞いで区別することの拡張になっています [8]。実際、$SU(N)$ pure Yang-Mills 理論は't Hooft magnetic flux を入れる操作が可逆でトポロジカルな操作になっており、Wilson loop の N-ality を測る $\mathbb{Z}_N$ one-form symmetry を定義します。これは生成消滅を行える gluon が adjoint 表現に属するので、Wilson loop の表現の N-ality は量子揺らぎを考慮しても well-defined な電荷になっている、という物理的な直感を正当化する対称性になっています。このとき、閉じ込め相では Wilson loop が面積則を示すため one-form symmetry が保たれており、Higgs 相ではこれが自発的に破れていることになります。つまり、Wilson の提案したゲージ理論の相の区別は、higher-form symmetry まで対称性として含めたときの Landau の相の分類とみなすことができるのです。

質量ギャップが開いていて、さらに higher-form symmetry が自発的に破れているなら、それはトポロジカル秩序になっています。この意味で、トポロジカル秩序は実際に秩序相だと言えます。この立場から BCS 超伝導の例を振り返ってみます。

まず、BCS 超伝導の有効理論 (2) あるいは (8) には $\mathbb{Z}_n$ one-form symmetry があります。このことを計算で示す代わりに、物理的に理解しておきましょう。理論の dynamical な自由度は photon a (電荷 0) と Cooper pair Φ (電荷 n) です。ここで、電荷 $q \in \mathbb{Z}$ の Wilson loop $W_q(C) = \left(\exp \mathrm{i} \int_C a\right)^q$ の期待値を計算することを考えます。つまり、電荷 q の試験粒子を系に導入してそのポテンシャルを調べるという操作なわけですが、これは量子的に意味のある主張でしょうか。量子論的には電荷 n の粒子が生成消滅を繰り返しますから、遠くから見れば試験電荷が q と $q \pm n$ のものは区別つきません。しかし、q と $q \pm 1$ は区別がつくわけです。このことは Wilson loop の電荷を $\mathbb{Z}_n$ として測ることができることを意味しており、$\mathbb{Z}_n$ one-form symmetry があることになります。

理論に $\mathbb{Z}_n$ one-form symmetry があるということは、gauged GL 理論 (2) としてはそれが Higgs 相にあってもなくても正しい主張です (ただし、現実には GL 理論自体が Higgs 相の有効理論であることは注意しておきます)。しかし、そのときに対称性を生成する codim-2 のトポロジカル欠陥を構成するのは少し慣れを要するので、ここでは Higgs 相での場合に話を限ります。Higgs 相に考察を限れば答えは簡単で、one-form symmetry は超伝導渦の world-sheet によって生成される、とみなすことが出来ます。まず、この演算子がトポロジカルなことは質量ギャップが開いているので渦間の相互作用は指数的に落ちることから、適切な繰り込み処方を取ればそうなっていることが従います。この渦を安定化させるためにその中に Aharonov-Bohm flux を通せば、渦と Wilson loop の交換関係は Wilson loop の $\mathbb{Z}_n$ 電荷を測る事がわかります。

さて、Higgs 相では Wilson loop が周長則に従うので、これも適切に繰り込めばトポロジカルな演算子になっていることがわかります。これはなにか対称性を生成しているのでしょうか。これはそのとおりで、$\mathbb{Z}_n$ (D-2)-form symmetry を生成していることがわかります。これは、もとの GL 理論 (2) には存在しなかった対称性で、Higgs 相の低エネルギー有効理論にでてくる emergent symmetry です。このときの電荷は、再び Aharonov-Bohm flux の通っている超伝導渦の world-sheet です。つまり、先程議論した自発的に破れている $\mathbb{Z}_n$ one-form symmetry の dual になっています。このようなことは、Abelian な対称性が自発的に破れるときに起こる、一般的な現象です。

4 ハドロン物理への応用: ゼロ温度での Quark-Hadron 連続性

さて、トポロジカル秩序 (の一部) を Landau の相の分類に組み込む、という目的で higher-form symmetry という新しい対称性の概念を導入しました。これにより、量子相を区別する不変量としても自発的対称性の破れが使えるようになったのです。ここでは、higher-form symmetry を QCD 相図の解析に応用した一例として、筆者が APCTP の広野氏と行なった CFL 相の研究について簡単に紹介します。

前提となるのは、Schaefer-Wilczek の quark-hadron continuity scenario です [9]。これは、SU(3) フレーバー対称性のある有限密度 QCD を考えたときに、低密度の核子超流動相と高密度の color-flavor locked (CFL) phase と呼ばれるカラー超伝導相はカイラル極限を含めて同じ自発的対称性の破れのパターンを示すので、これらは同じ相である、という主張です。さて、絶対零度に十分近い世界を考えれば、Landau 的な通常の分類では不十分である可能性があり、量子相としてもこれらが同じかどうかはより注意深い議論が必要です。QCD の場合、先程の continuity scenario は絶対零度に拡張されるのでしょうか。それとも、実は異なるのでしょうか。

これについて、実は 2 つは異なるのではないかという論文が出ました [10]。そこでは、CFL 相での平均場近似を見直すことで、CFL minimal vortex の周りで test quark を一周させると $\mathbb{Z}_3$ phase がでる、ということが発見されました。これは、ほとんど先程 BCS 超伝導で議論したことの $n = 3$ の場合にみえます。カラーが十分に screen されたハドロンの世界ではこのような $\mathbb{Z}_3$ phase が出るとは考えにくい、ということで quark 相と hadron 相は異ならなくてはならない、ということが主張されました。その一方で、この $\mathbb{Z}_3$ phase の起源は謎に包まれていました。

そこで、広野氏と筆者はこの問題を対称性の立場で整備して、対称性の自発的破れを higher-form symmetry を含めて考察することにしました [11]。BCS 理論と違い、CFL 相での Cooper 対である diquark が $\mathbf{3}^*$ 表現に属するため $\mathbb{Z}_3$ one-form symmetry が完全に破壊されています。その一方、QCD ではカラー電荷はすべて十分長距離で screening を受けるので、適切なくりこみのもとで Wilson loop は低エネルギーではトポロジカルな演算子に見えます。この立場に立つと、CFL 相においては Wilson loop によって生成される $\mathbb{Z}_3$ two-form symmetry が創発し、このもとで CFL minimal vortex の world-sheet が電荷を持っていることがわかります。つまり、先程のべた $\mathbb{Z}_3$ phase はこの emergent two-form symmetry が CFL 相で存在することを意味しています。技術的には、拡張された BF 理論を CFL 相の有効理論として導出して示すことができます。

このように見ると、$\mathbb{Z}_3$ phase の存在だけでは量子相としての違いを主張するには十分ではないことが明らかになります。対称性は存在するだけでなくその自発的な破れを伴わない限りは、低エネルギー有効理論に新しい自由度を付け足さないからです。つまり、CFL minimal vortex が閉じ込められているかどうかが、quark 相と hadron 相が量子相として同じかどうかという問題の翻訳になっています。そして、この問題の答えは超流動の文脈で古くから知られています：超流動渦の間には log ポテンシャル

$$V(R) \sim \ln(R) \tag{15}$$

が働きますから、超流動渦は閉じ込められています。つまり、結論は CFL 相には創発的な $\mathbb{Z}_3$ two-form symmetry があるが真空はこれを保っており、quark-hadron continuity は絶対零度の量子相まで拡張される、ということになります。ただし、これは QCD ハミルトニアンのある連続変形で 2 つの量子真空を連続的につなぐことができる、という主張ですから、特定の一つの変

形であるバリオン化学ポテンシャル方向について量子相転移があるかどうかはこのような運動学的な議論を超えた dynamics の理解が必要不可欠であることは、強調しておきたいと思います。

5 最後に

対称性の重要性は物理では学生のうちから繰り返し教えられ、今回のテーマである Landau の相の分類に限らず様々な場面で顔を出します。そして、私達の重要な研究テーマである量子場の理論において、物性から素粒子まで含めた幅広い観点から見たときに、これまでの対称性の概念では捉えることが出来ず、かつ非常に普遍性の高い多くの現象が見つかってきました。これらを理解するため、対称性という概念そのものが近年になり非常に一般化され、たくさんの新しい研究が生み出されています。本稿では QCD への応用を含めてその一端を垣間見たわけですが、まだ他にも QCD のまだ見ぬ定性的な側面が明らかにできるのではないでしょうか。この記事がそのような新しい研究のきっかけになったのであれば幸いです。

初期の原稿を読んでコメントをくれた広野さん、本郷くんに感謝します。また、本稿を書くきっかけを頂いた初田さん、飯田さんに感謝の意を表して、この記事を締めくくりたいと思います。

参考文献

[1] L. D. Landau, "On the theory of phase transitions. I.," *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **11** (1937) 19.

[2] V. L. Ginzburg and L. D. Landau, "On the theory of superconductivity," *Zh. eksp. teor. Fiz* **20** no. 1064-1082, (1950) 35.

[3] R. B. Laughlin, "Anomalous quantum Hall effect: An Incompressible quantum fluid with fractionally charged excitations," *Phys. Rev. Lett.* **50** (1983) 1395.

[4] O. Aharony, N. Seiberg, and Y. Tachikawa, "Reading between the lines of four-dimensional gauge theories," *JHEP* **08** (2013) 115, arXiv:1305.0318 [hep-th].

[5] D. Gaiotto, A. Kapustin, Z. Komargodski, and N. Seiberg, "Theta, Time Reversal, and Temperature," *JHEP* **05** (2017) 091, arXiv:1703.00501 [hep-th].

[6] Y. Tanizaki and Y. Kikuchi, "Vacuum structure of bifundamental gauge theories at finite topological angles," *JHEP* **06** (2017) 102, arXiv:1705.01949 [hep-th].

[7] D. Gaiotto, A. Kapustin, N. Seiberg, and B. Willett, "Generalized Global Symmetries," *JHEP* **02** (2015) 172, arXiv:1412.5148 [hep-th].

[8] K. G. Wilson, "Confinement of Quarks," *Phys. Rev.* **D10** (1974) 2445–2459.

[9] T. Schäfer and F. Wilczek, "Continuity of quark and hadron matter," *Phys. Rev. Lett.* **82** (1999) 3956–3959, arXiv:hep-ph/9811473 [hep-ph].

[10] A. Cherman, S. Sen, and L. G. Yaffe, "Anyonic particle-vortex statistics and the nature of dense quark matter," arXiv:1808.04827 [hep-th].

[11] Y. Hirono and Y. Tanizaki, "Quark-hadron continuity beyond Ginzburg-Landau paradigm," arXiv:1811.10608 [hep-th].